Θέματα Εξετάσεων Λυκείου

Τα θέματα συντάχθηκαν πριν την αναδιάταξη
της διδακτέας ύλης μεταξύ Α′ και Β′ Λυκείου

Συλλογή-Επιμέλεια: Γ. Κοντογιάννης, Μαθηματικός MPhil

Α΄ Λυκείου

Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για α, β πραγματικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ **Μονάδες 10**

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$ με α, β πραγματικούς αριθμούς.

β) $\sqrt{x^2} = x$ με x πραγματικό αριθμό.

γ) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με πραγματικές ρίζες x_1, x_2 μετασχηματίζεται στην εξίσωση $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1x_2$.

δ) Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ε) Η συνάρτηση $y = \alpha x^2$ με $\alpha < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι αριθμοί $\kappa = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ και $\lambda = \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{3}}$.

Να δείξετε ότι: $\kappa = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες $x_1 = \kappa$ και $x_2 = \lambda$. **Μονάδες 7**

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $|x - 3| = 2$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-|x|}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**

Β. Να εξετάσετε αν το σημείο Α (0, 1) ανήκει στη γραφική παράσταση της f. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α (0, 1) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = 2$. **Μονάδες 7**

Δ. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Α. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχει μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή. **Μονάδες 8**

Β. Να βρείτε τα διαστήματα του x για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x΄x. **Μονάδες 8**

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{-x^2+4x-3}{2x-1} < 0$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Γράψτε τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού. **Μονάδες 4**

β) Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες, για $\theta > 0$:

i) $|x| = \theta \Leftrightarrow$ ....

ii) $|x| \leq \theta \Leftrightarrow$ ....

iii) $|x| > \theta \Leftrightarrow$ .... **Μονάδες 9**

Β. Αντιστοιχήστε κάθε σχέση της στήλης Α με το σωστό συμπέρασμα της στήλης Β.

Α	**Β** Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$:
1) $\Delta < 0$	**α)** έχει δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές.
2) $\Delta > 0, -\frac{\beta}{\alpha} > 0, \frac{\gamma}{\alpha} > 0$	**β)** έχει δύο ρίζες πραγματικές και θετικές.
3) $\Delta = 0$	**γ)** έχει δύο ρίζες πραγματικές και ετερόσημες.
4) $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$	**δ)** έχει ρίζες πραγματικές και ίσες.
	ε) δεν έχει ρίζες πραγματικές.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Λύστε, για τις διάφορες τιμές του λ, την εξίσωση: $2\lambda x = 4\lambda$. **Μονάδες 5**

Β. Λύστε την εξίσωση: $\dfrac{1}{2\,(x+1)} - \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1}$. **Μονάδες 10**

Γ. Λύστε την ανίσωση: $3x - 2 \leq 2\,(x-1) - (1-x)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση: $\lambda x^2 + 5x + 10 = 0$ έχει μοναδική λύση; **Μονάδες 9**

Β. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, βρείτε τη μοναδική λύση της παραπάνω εξίσωσης. **Μονάδες 7**

Γ. Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη; **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Λύστε το σύστημα: $\begin{cases} 2x + 1 = 3y \\ 5 - 2y = 3x \end{cases}$ **Μονάδες 10**

Β. Λύστε την ανίσωση: $x\,(x^2 + x - 2)\,(x+1)^2 \geq 0$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν α, β $\in$ R, να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. **Μονάδες 10**

Β. Πότε μια συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως φθίνουσα; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $|x - 1| + |y - 2| = 0$, τότε $x = 1$ και $y = 2$.

β) Η ευθεία $x = -2$ είναι παράλληλη στον άξονα xx΄.

γ) Αν το σύστημα δύο εξισώσεων που παριστάνουν ευθείες είναι αδύνατο, οι ευθείες είναι παράλληλες.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ε) Το συμμετρικό του σημείου Μ (α, β), ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Λ (– α, β). **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων:

α) $x^2 + 3x - 4$

β) $x^2 - 2x - 3$

γ) $x^2 - 1$

δ) $x^2 + 2$ **Μονάδες 12**

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 3x - 4)}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **Μονάδες 4**

β) Να βρείτε την ανίσωση $f(x) \geq 0$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να βρεθούν οι τιμές του λ $\in$ R ώστε το σύστημα $\begin{aligned} (4\lambda^2 - 6)x - y &= -3 \\ -5\lambda x + y &= +8 \end{aligned}$

να είναι αδύνατο. **Μονάδες 10**

Β. Αν $\dfrac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και εφω = λ, όπου λ μία από τις τιμές του λ $\in$ R

που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

Β. Να εξετάσετε αν είναι άρτια η περιττή. **Μονάδες 8**

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| \geq \dfrac{1}{2}$. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί τότε $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$. **Μονάδες 10**

Β. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται περιττή; **Μονάδες 6**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν για την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ οι αριθμοί α, γ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β) Η συνάρτηση $f : [-1, 2] \to R$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια.

γ) Η εξίσωση $x^3 = -8$ είναι αδύνατη. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $|2x + 1| \geq 5$ **Μονάδες 10**

β) $\dfrac{|x-1|-4}{2} + \dfrac{5}{3} < \dfrac{|x-1|}{3}$ **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο παραπάνω ανισώσεων. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο

Επί ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, μήκους 10 cm, παίρνουμε ένα σημείο Μ και θέτουμε ΑΜ = x $(0 < x < 10)$. Κατασκευάζουμε δύο τετράγωνα με πλευρές τα τμήματα ΑΜ και ΜΒ αντιστοίχως.

Α. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων συναρτήσει του x δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$. **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ πάνω στο τμήμα ΑΒ, έτσι ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων να είναι το ελάχιστο δυνατό. Ποιό είναι το ελάχιστο αυτό άθροισμα; **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (k-2)x^2 - 2|k|x + k + 2$, $\forall k \in R - \{2\}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες $\forall k \in R - \{2\}$. **Μονάδες 3**

Β. Να βρεθεί η τιμή του k ώστε η συνάρτηση f (x) με $k \in R - \{2\}$ να παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0 = 2$. **Μονάδες 7**

Γ. Αν k = 4:

α) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{f(x)}{2x} \leq 8$. **Μονάδες 7**

β) Να λυθεί η εξίσωση $|f(x)| = 2x - 2$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε α, β $\in$ R ισχύει: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$. **Μονάδες 5**

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α. **Μονάδες 5**

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $-1 \leq P(A) \leq 1$.

ii) Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με ν άρτιο και α θετικό, έχει δύο ρίζες αντίθετες.

iii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το Α, περιέχει όλα τα σημεία της μορφής Μ (x, f (x)), για κάθε x $\in$Α.

iv) Τα σημεία Α (α, β) και Α′ (β, α) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία με εξίσωση ψ = x.

v) Ισχύει: $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}}$, με $\alpha \geq 0$ και ν, μ, ρ θετικούς ακέραιους. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 1 = 0$ (1)

Β1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1),να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. **Μονάδες 10**

Β2. Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2. **Μονάδες 5**

Β3. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 1| = x_1 + x_2$. **Μονάδες 5**

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 3| > x_1 x_2$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού (A_f) της συνάρτησης και να δείξετε ότι f (x) = x + 1 για κάθε x $\in$ A_f. **Μονάδες 8**

Γ2. Να βρείτε την παράλληλη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο Β (0, 2013). **Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x′x και ψ′ψ (αν υπάρχουν). **Μονάδες 6**

Γ4. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τα ενδεχόμενά του Α και Β, όπου:

$$A = \{x \in \Omega \ / \ x^2 - 6x + 8 \le 0\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \Omega \ / \ -x^2 + 9x - 20 \ge 0\}$$

Δ1. Να λύσετε τις ανισώσεις: $x^2 - 6x + 8 \le 0$ και $-x^2 + 9x - 20 \ge 0$. **Μονάδες 10**

Δ2. Να γράψετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α, Β, $A \cap B$ και $A \cup B$. **Μονάδες 9**

Δ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.

β) Να πραγματοποιείται μόνο το Β. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε α, β $\in$ R ισχύει: $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$. **Μονάδες 5**

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α. **Μονάδες 5**

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Για κάθε ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $-1 \le P(A) \le 1$.

ii) Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με ν άρτιο και α θετικό, έχει δύο ρίζες αντίθετες.

iii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το Α, περιέχει όλα τα σημεία της μορφής Μ (x, f (x)), για κάθε x $\in$Α.

iv) Τα σημεία Α (α, β) και Α′ (β, α) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία με εξίσωση ψ = x.

v) Ισχύει: $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}}$, με α ≥ 0 και ν, μ, ρ θετικούς ακέραιους. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 1 = 0$ (1)

Β1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1),να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ και $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$. **Μονάδες 10**

Β2. Να κατασκευάσετε την εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς x_1^2 και x_2^2. **Μονάδες 5**

Β3. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 1| = x_1 + x_2$. **Μονάδες 5**

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 3| > x_1 x_2$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού (A_f) της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in A_f$. **Μονάδες 8**

Γ2. Να βρείτε την παράλληλη ευθεία της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο Β (0, 2013). **Μονάδες 6**

Γ3. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες x′x και ψ′ψ (αν υπάρχουν). **Μονάδες 6**

Γ4. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τα ενδεχόμενά του Α και Β, όπου:

$$A = \{x \in \Omega \ / \ x^2 - 6x + 8 \leq 0\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in \Omega \ / \ -x^2 + 9x - 20 \geq 0\}$$

Δ1. Να λύσετε τις ανισώσεις: $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ και $-x^2 + 9x - 20 \geq 0$. **Μονάδες 10**

Δ2. Να γράψετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α, Β, $A \cap B$ και $A \cup B$. **Μονάδες 9**

Δ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Να πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.

β) Να πραγματοποιείται μόνο το Β. **Μονάδες 6**

Α΄ Λυκείου

Γεωμετρία

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας. **Μονάδες 15**

Β. α) Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε τις μεσοκαθέτους των τριών πλευρών του και κατόπιν να σχεδιάσετε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου. **Μονάδες 4**

β) Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

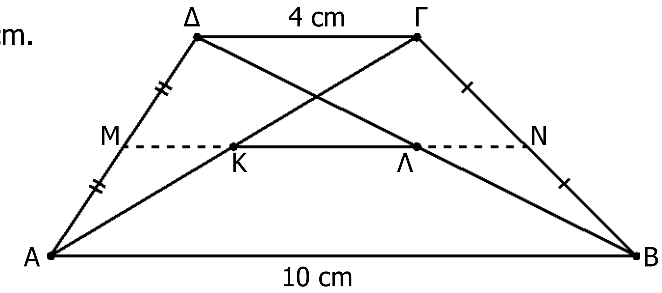
i) Στο τετράγωνο οι διαγώνιές του είναι ίσες.

ii) Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.

iii) Παραλληλόγραμμο με διαγώνιες ίσες είναι ρόμβος. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Στο διπλανό σχήμα η ΜΝ είναι διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ και ΑΒ = 10 cm και ΓΔ = 4 cm.

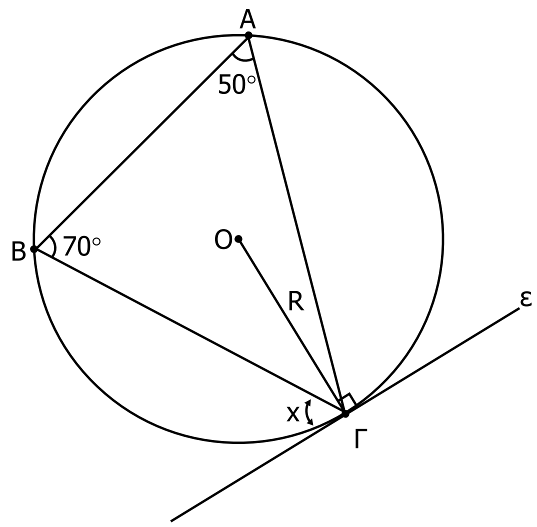


α) Να βρείτε το μήκος του ΚΛ.
Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα μήκη των ΜΚ και ΛΝ.
Μονάδες 5

γ) Αν $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$, να δικαιολογήσετε ότι ΑΓ = ΔΒ. **Μονάδες 5**

Β. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο, R) και $\hat{A} = 50^\circ$ και $\hat{B} = 70^\circ$.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{x}$.
Μονάδες 5

β) Να βρείτε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$.
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που να μην τέμνει το τρίγωνο και να μην είναι παράλληλη στη ΒΓ. Αν ΒΒ′ $\perp$ ε και ΓΓ′ $\perp$ ε να δικαιολογήσετε τις παρακάτω προτάσεις:

Α. Το ΒΒ′Γ′Γ είναι τραπέζιο. **Μονάδες 5**

Β. Αν Μ το μέσο της Β′Γ′ και Δ μέσο της ΒΓ τότε ΜΔ // ΒΒ′ // ΓΓ′ και $\frac{ΒΒ' + ΓΓ'}{2}$. **Μονάδες 10**

Γ. ΜΔ $\perp$ ε. **Μονάδες 5**

Δ. Αν ΑΔ διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και Κ το μέσο της τότε $ΜΚ = \frac{ΑΔ}{2}$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

Α. ΒΔΗΖ και ΓΔΗΕ εγγράψιμα τετράπλευρα. **Μονάδες 5**

Β. ΒΖΕΓ εγγράψιμο τετράπλευρο. **Μονάδες 5**

Γ. ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{\Delta}E$ του τριγώνου ΔΖΕ. **Μονάδες 10**

Δ. Τι είναι και πώς ονομάζεται το σημείο Η στο ΔΕΖ τρίγωνο; **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας. **Μονάδες 15**

Β. α) Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ να φέρετε τις μεσοκαθέτους των τριών πλευρών του και κατόπιν να σχεδιάσετε τον περιγεγραμμένο κύκλο. **Μονάδες 4**

β) Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

i) Στο τετράγωνο οι διαγώνιές του είναι ίσες.

ii) Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι ρόμβος.

iii) Παραλληλόγραμμο με διαγώνιες ίσες είναι ρόμβος. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε το μέσο της ΑΒ και Ζ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

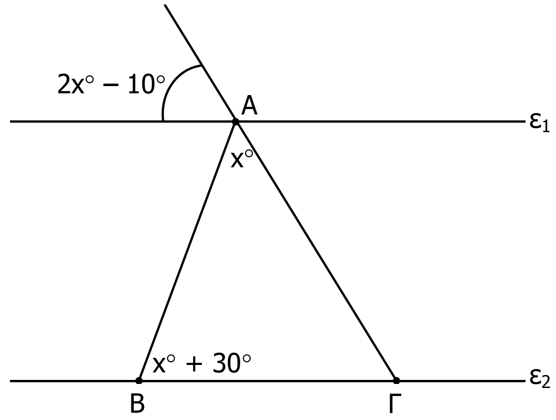
Α. τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΑΔΕ είναι ισοσκελή **Μονάδες 5**

Β. η γωνία $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90^\circ$ **Μονάδες 7**

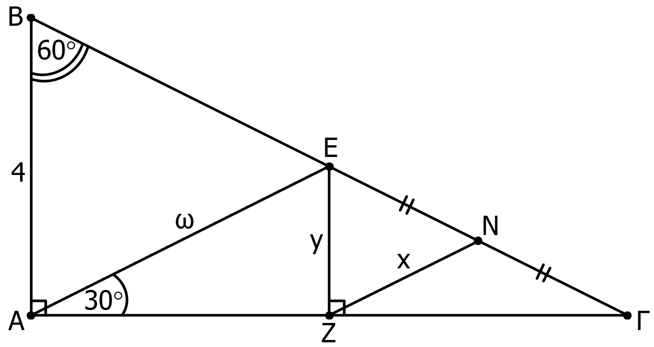
Γ. $EZ = \frac{B\Gamma}{2}$ **Μονάδες 5**

Δ. έστω Μ το μέσο της ΕΖ, τότε $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο

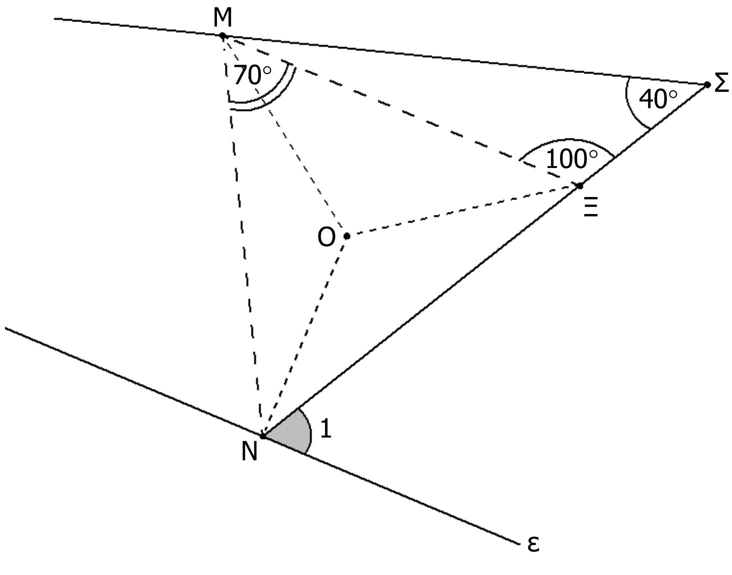


Α. Στο διπλανό σχήμα είναι ε_1 // ε_2.
Ζητείται η τιμή του x σε μοίρες.
Μονάδες 5



Β. Στο διπλανό σχήμα ζητούνται τα μήκη των ΖΝ = x, ΖΕ = y και ΑΕ = ω όταν είναι γνωστό ότι ΑΒ = 4, $\hat{B} = 60°$ και $E\hat{A}Z = 30°$.
Μονάδες 8

Γ. Στο διπλανό σχήμα ΣΜ και (ε) είναι εφαπτομένες του κύκλου. Ζητούνται:
α) τα τόξα $\overset{\frown}{N\Xi}$, $\overset{\frown}{\Xi M}$ και $\overset{\frown}{MN}$
β) η γωνία χορδής εφαπτομένης $\hat{N}_1$.
Μονάδες 12



ΘΕΜΑ 4ο

Α. Σχεδιάστε ένα αμβλυγώνιο ($\hat{A} > 90°$) τρίγωνο ΑΒΓ και φέρετε τα 3 ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. **Μονάδες 5**

Β. Βρείτε τα εγγράψιμα τετράπλευρα που υπάρχουν στο σχήμα του ερωτήματος (Α). **Μονάδες 8**

Γ. Αποδείξτε ότι τα ύψη αυτά διχοτομούν τις γωνίες του $\Delta\hat{E}Z$. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

α) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. **Μονάδες 5**

β) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες. **Μονάδες 5**

γ) Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. **Μονάδες 5**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

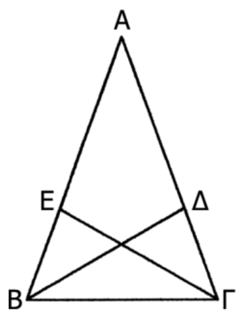
α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) που αντιστοιχεί στη βάση ΒΓ είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Α.

γ) Αν δύο κύκλοι τέμνονται τότε η διάκεντρος είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

δ) Περίκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του.

ε) Ρόμβος λέγεται το τετράπλευρο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. **Μονάδες 10**



ΘΕΜΑ 2ο

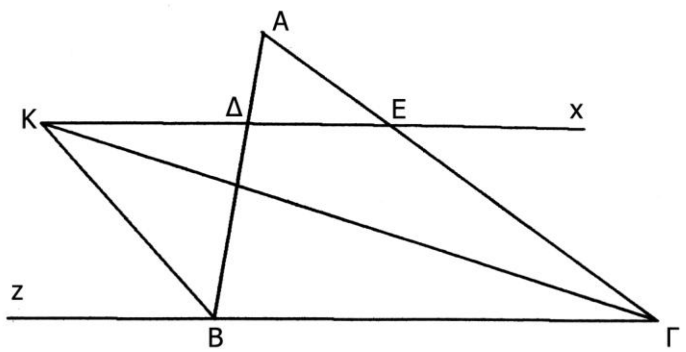
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Αν ΒΔ, ΓΕ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

Α. ΒΔ = ΓΕ **Μονάδες 15**

Β. το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ οι οποίες τέμνονται στο Κ. Από το Κ φέρουμε Κx // ΒΓ η οποία τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Α Να αποδείξετε ότι:



Α. ΚΕ = ΕΓ **Μονάδες 10**

Β. ΚΔ = ΒΔ **Μονάδες 10**

Γ. ΔΕ = ΕΓ – ΒΔ. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{A} = 120°$.

Η κάθετη στο μέσο Μ της ΑΒ τέμνει την ΒΓ στο Δ.

Από το Α φέρνω παράλληλη προς τη ΜΔ η οποία τέμνει την ΒΓ στο Ε.

Α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΓ. **Μονάδες 10**

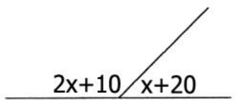
Β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο. **Μονάδες 10**

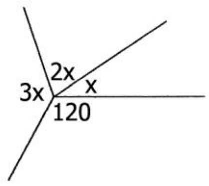
Γ. Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 3ΒΔ. **Μονάδες 5**

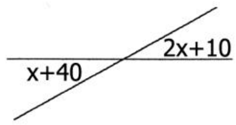
ΘΕΜΑ 1ο

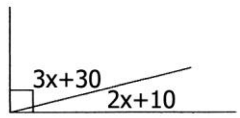
Α. Αποδείξτε ότι οι διχοτόμοι δυο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες. **Μονάδες 7**

Β. Γράψτε την τιμή που πρέπει να έχει το x, ώστε να αληθεύουν τα μέτρα των γωνιών σε μοίρες που εμφανίζονται σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.









α) x = ... **β)** x = ... **γ)** x = ... **δ)** x = ...

Μονάδες 12

Γ. Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από:

α) τις πλευρές μιας γωνίας είναι ....

β) τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ....

γ) ένα σταθερό σημείο είναι .... **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 2ο

Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο του ΑΔ, η οποία τέμνει την ΑΔ στο Ε και την πλευρά Α Γ στο Ζ. Αποδείξτε ότι:

Α. ΑΒ = ΑΖ **Μονάδες 12**

Β. η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία ΒΔΖ. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 3ο

Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη της ΑΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Δ, και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΔΖ = ΜΔ. Από το Μ φέρνουμε επίσης παράλληλη της ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΕΗ = ΜΕ. Αποδείξτε ότι:

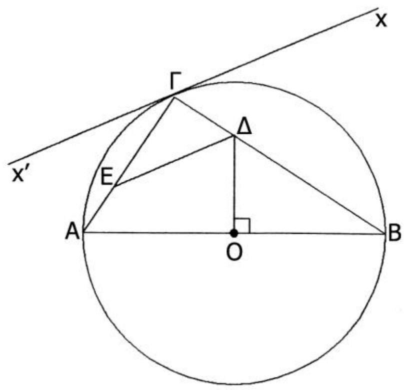
Α. τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά. **Μονάδες 10**

Β. ΖΑ = ΑΗ. **Μονάδες 5**

Γ. Η περίμετρος του τριγώνου ΜΖΗ ισούται με την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία x′x εφάπτεται στον κύκλο κέντρου (Ο, ΟΒ). Η ΟΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και η ΔΕ είναι παράλληλη στη x′x. Αποδείξτε ότι τα τετράπλευρα:



Α. ΑΟΔΓ **Μονάδες 12**

Β. ΑΒΔΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα. **Μονάδες 16**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το ορθόκεντρο οποιουδήποτε τριγώνου είναι πάντοτε εσωτερικό σημείο του.

β) Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος και ορθογώνιο τότε είναι τετράγωνο. **Μονάδες 4**

Γ. Επιλέξτε τη σωστή σχέση.

α) Οι κύκλοι (Κ, ρ) και (Ο, R) τέμνονται όταν:

i) $KO > R - \rho$ **ii)** $KO = R - \rho$ **iii)** $KO < R - \rho$

iv) $R - \rho < KO < R + \rho$ **v)** κανένα από τα προηγούμενα **Μονάδες 2**

β) Αν οι γωνίες $\hat{\omega} = \hat{x} + 45^\circ$ και $\hat{\varphi} = \hat{x} + 105^\circ$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες τότε η x ισούται με:

i) 20° **ii)** 40° **iii)** 80° **iv)** 15°

v) 100° **vi)** κανένα από τα προηγούμενα **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΒ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

Α. το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου **Μονάδες 13**

Β. η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

Α. $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ **Μονάδες 11**

Β. $A\hat{\Delta}B = 90^\circ - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$, $A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$ **Μονάδες 14**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α = Δ = 90°, ΔΓ = 2ΑΒ και Β = 3Γ.

Φέρνουμε ΒΕ ⊥ ΔΓ που τέμνει την διαγώνιο ΑΓ στο Μ.

Φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει την άλλη διαγώνιο ΒΔ στο Ν. Να δείξετε ότι:

Α. το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο **Μονάδες 5**

Β. το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο **Μονάδες 7**

Γ. ΑΕ ⊥ ΒΔ **Μονάδες 6**

Δ. $MN = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε την πρόταση: «Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) η μία οξεία γωνία του είναι 30° τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως». **Μονάδες 16**

Β. Αν οι γωνίες $\hat{\omega} = 100^\circ - \hat{x}$ και $\hat{\varphi} = 20^\circ + \hat{x}$ έχουν τις πλευρές τους κάθετες τότε το x ισούται με:

α) 40° **β)** 45° **γ)** 50° **δ)** 55° **ε)** 10° **Μονάδες 3**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο όταν οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

β) Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι πάντα εσωτερικό σημείο του. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 2ο

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να δείξετε ότι:

Α. $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$ **Μονάδες 12**

Β. $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε ΑΕ κάθετη στην ΔΒ και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Δείξτε ότι:

Α. $K\hat{E}\Lambda = 90^\circ$ **Μονάδες 8**

Β. $K\Lambda = \dfrac{A\Gamma}{2}$ **Μονάδες 8**

Γ. Αν $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$, τότε ΚΛ = ΒΓ. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $B\hat{A}E$ που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ. Από το Ε φέρνουμε κάθετη στην ΑΖ που τέμνει την ΑΖ στο Κ (το Κ είναι εσωτερικό της ΑΖ) και την προέκταση της ΑΒ στο Θ και την $EH \perp AB$. Δείξτε ότι:

Α. ΑΕ = ΑΘ **Μονάδες 8**

Β. τα τρίγωνα ΘΗΕ, ΑΒΖ είναι ίσα **Μονάδες 8**

Γ. ΑΕ = ΔΕ + ΒΖ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι δύο ορθές. **Μονάδες 10**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Δύο ευθείες που είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

β) Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων άνισης ακτίνας είναι μεσοκάθετη της διακέντρου τους.

γ) Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Από τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ.

Να αποδειχθεί ότι:

Α. το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές **Μονάδες 12**

Β. ΕΓ = ΒΔ. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με Α = Δ = 90°, ΑΒ παράλληλη ΓΔ και ισχύει 2ΑΒ = ΓΔ = ΒΓ.

Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

Α. το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ορθογώνιο **Μονάδες 6**

Β. το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο **Μονάδες 6**

Γ. η γωνία Γ = 60° **Μονάδες 6**

Δ. η ΔΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Οι διάμεσοι ΑΜ και ΒΝ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Θ. Η διάμεσος ΒΝ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ.

Να αποδείξετε ότι:

Α. $ΑΘ = \frac{1}{3} ΒΓ$ **Μονάδες 10**

Β. η γωνία ΒΔΓ είναι ορθή **Μονάδες 5**

Γ. η περίμετρος του τριγώνου ΑΜΝ είναι το μισό της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες του ίσες. **Μονάδες 15**

Β. Ποιο παραλληλόγραμμο ονομάζεται ρόμβος; **Μονάδες 4**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Κάθε επίκεντρη γωνία ισούται με το μισό της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

β) Αν οι απέναντι γωνίες ενός ρόμβου είναι παραπληρωματικές τότε ο ρόμβος είναι τετράγωνο.

γ) Αν οι χορδές δύο τόξων του ίδιου κύκλου είναι ίσες τότε τα τόξα είναι ίσα. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 25**

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α.

Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΒ.

Α. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΔΕ. **Μονάδες 6**

Β. Αν η προέκταση της ΔΕ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ζ να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\hat{Z}\Delta} = \mathrm{E\hat{\Gamma}\Delta}$. **Μονάδες 6**

Γ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ κάθετη στη ΓΖ. **Μονάδες 6**

Δ. Να αποδείξετε ότι ΒΕΓΖ ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, ΔΓ = 2ΑΒ και $\hat{B} = 120^\circ$.

Φέρνουμε ΒΕ κάθετη στην ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

Α. οι ΒΕ και ΑΓ διχοτομούνται **Μονάδες 7**

Β. η ΑΕ κάθετη στη ΒΔ **Μονάδες 10**

Γ. Αν Ν το μέσο της ΒΔ και Μ το μέσο της ΑΓ τότε $\mathrm{MN} = \dfrac{\Gamma\Delta}{4}$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 1ο

Α$_1$. Αποδείξτε το θεώρημα: «Κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της».

Μονάδες 10

Α$_2$. Να δώσετε τον ορισμό του ορθογωνίου. **Μονάδες 5**

Α$_3$. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» (Σ) ή «Λάθος» (Λ):

α) Η μεσοκάθετος πλευράς τριγώνου είναι και διάμεσος του.

β) Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

γ) Οι διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται κάθετα.

δ) Οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες.

ε) Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 3 ορθές. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ: μέσο ΒΓ. Μία ευθεία ε // ΒΓ τέμνει (εσωτερικά) τα ΑΒ, ΑΜ, ΑΓ στα σημεία Δ, Κ, Ε αντίστοιχα. Δείξτε ότι:

Β$_1$. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. **Μονάδες 10**

Β$_2$. Το Κ είναι μέσο της ΔΕ. **Μονάδες 10**

Β$_3$. Τα τρίγωνα ΔΒΚ και ΕΓΚ είναι ίσα. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ,Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

Γ$_1$. $H\Delta = \dfrac{A\Delta}{2}$ και $E\Delta \,//\, \dfrac{B\Gamma}{2}$. **Μονάδες 10**

Γ$_2$. ΔΗΖΕ: ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 9**

Γ$_3$. Αν $\hat{B} = 60°$ να δείξετε ότι ΒΗ = ΕΖ. **Μονάδες 3**

Γ$_4$. $H\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Δείξτε ότι:

Δ$_1$. Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. **Μονάδες 10**

Δ$_2$. Οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο). **Μονάδες 11**

Δ$_3$. Αν Κ, Λ τα σημεία τομής των ΑΖ, ΕΓ με την ΒΔ αντίστοιχα, δείξτε ότι: $AK = \Gamma\Lambda = \dfrac{2}{3}AZ$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 1ο

$Α_1$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. **Μονάδες 15**

$Α_2$. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) ή (Λ) καθεμιά από τις προτάσεις:

α) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία τότε είναι πάντοτε ίσα.

β) Δύο τρίγωνα με ίσες γωνίες είναι πάντοτε ίσα.

γ) Η ευθεία του αποστήματος της χορδής ενός κύκλου τέμνει το αντίστοιχο τόξο της χορδής στο μέσο του.

δ) Τα σημεία του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία του βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία.

ε) Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΕ = ΓΖ. Ονομάζουμε Κ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΖ και ΓΕ.

$Β_1$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΕ είναι ίσα. **Μονάδες 6**

$Β_2$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΖΓ είναι ίσα. **Μονάδες 6**

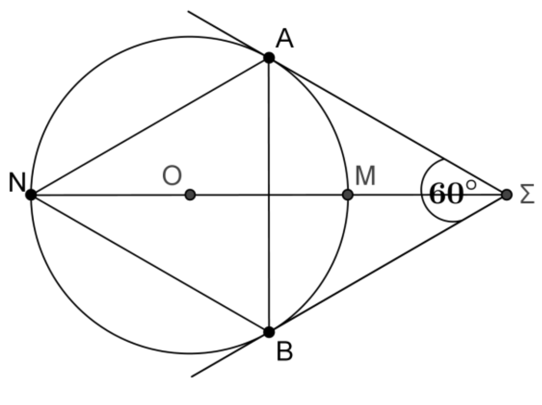
$Β_3$. Να αποδείξετε ότι ΒΚ = ΚΓ και ΕΚ = ΚΖ. **Μονάδες 6**

$Β_4$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΚ είναι η μεσοκάθετος της ΒΓ. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και τα εφαπτόμενα τμήματά του ΣΑ και ΣΒ.

Γνωρίζουμε ότι $Α\hat{Σ}Β = 60°$ και ότι η ευθεία ΣΟ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ και Ν.



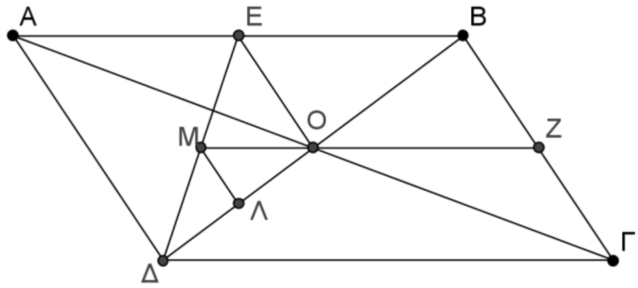
$Γ_1$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΣΑΒ είναι ισόπλευρο. **Μονάδες 8**

$Γ_2$. Να αποδείξετε ότι: ΟΣ = 2ΜΣ. **Μονάδες 8**

$Γ_3$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΣΑΝΒ είναι ρόμβος. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο.
Έστω **Ε** το μέσο της ΑΒ , **Ζ** το μέσο της ΒΓ
και **Λ , Μ** τα μέσα των ΔΟ και ΔΕ αντίστοιχα.



$Δ_1$. Να αποδείξετε ότι: ΒΓ = 2ΟΕ. **Μονάδες 6**

$Δ_2$. Να αποδείξετε ότι: $ΜΛ = \frac{ΑΔ}{4}$. **Μονάδες 6**

$Δ_3$ Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ**,** Ο και Ζ είναι συνευθειακά και ότι ΟΖ = 2ΜΟ. **Μονάδες 9**

$Δ_4$. Αν ΑΕ = 6cm, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΜΖ. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΙΣΟΤΗΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ
ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ-ΚΥΚΛΟΥ

1. Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) . Αν ΒΔ και ΓΕ τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι οι κορυφές του Β, Γ ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.

4. Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, τέτοια ώστε ΑΔ=ΑΕ. Να δειχθεί ότι τα σημεία Δ, Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ και τα άκρα της.

5. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90), με ΑΔ ύψος. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.

6. Σε κύκλο (Ο,ρ) φέρνουμε δυο χορδές ΑΒ και ΓΔ ώστε ΑΒ=ΓΔ , οι προεκτάσεις των οποίων τέμνονται στο Μ. Αν ΟΚ και ΟΛ τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :
   Α) ΑΚ=ΓΛ
   Β) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα
   Γ) ΜΑ=ΜΓ και ΜΒ=ΜΔ

7. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ.

   Να αποδείξετε ότι :

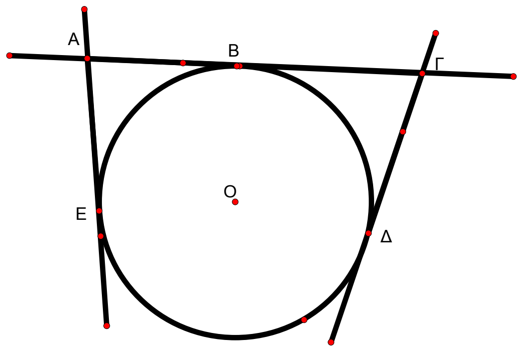
   Α) ΒΔ=ΓΕ

   Β) το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές

8. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ μρ ΑΒ<ΑΓ και η διχοτόμος της γωνίας Α. Φέρνουμε την κάθετη ΒΖ στην ΑΔ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

   Α) το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές

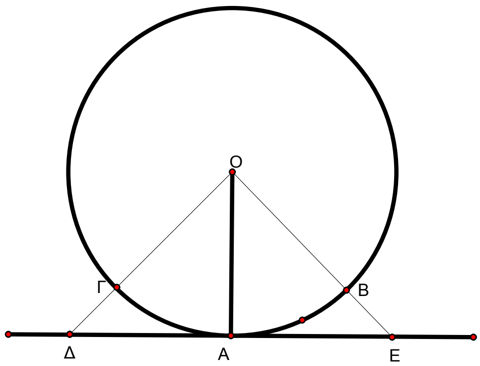
   Β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ



9. Στο διπλανό σχήμα οι ΑΓ , ΑΕ και ΓΔ είναι εφαπτόμενες του κύκλου με κέντρο Ο.

   Α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

   Β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ=ΑΕ+ΓΔ



10. Στο διπλανό σχήμα η ΔΕ εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Α. Αν ΑΔ=ΑΕ , να αποδείξετε ότι ΔΓ=ΒΕ.

Β΄ Λυκείου

Άλγεβρα

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για τα τόξα α·β να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α) $ημ2α = 2ημα·συνα$ **Μονάδες 5**

β) $συν2α = συν^2α – ημ^2α$ **Μονάδες 5**

γ) $συν2α = 2συν^2α – 1$ **Μονάδες 5**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το Ρ (x) έχει παράγοντα το (x – ρ) αν και μόνο αν Ρ (ρ) = 0.

β) Το άθροισμα των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $α_1$ και λόγο λ, με |λ| < 1, είναι $S = \dfrac{α_1}{λ-1}$.

γ) Αν για τρεις τυχαίους αριθμούς α, β, γ $\in$ R ισχύει ότι $β^2 = α·γ$, τότε οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

δ) Αν α > 0, α $\neq$ 1 και για κάθε $\partial_1, \partial_2 > 0$ ισχύει ότι $\log_α\left(\dfrac{\partial_1}{\partial_2}\right) = \log_α\partial_1 - \log_α\partial_2$.

ε) Η συνάρτηση $y = \ell nx$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 – 6x^2 + αx – 4$.

Α. Να βρείτε την τιμή του α έτσι ώστε το Ρ (x) να έχει ρίζα το 1. **Μονάδες 7**

Β. Για α = 0 να δείξετε ότι $P(x) = (x – 1)^2 (x – 4)$. **Μονάδες 10**

Γ. Για α = 9 να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης Ρ (x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο

Σε μια αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $\ell n2$ και ο τρίτος όρος $\ell n32$.

Α. Να δείξετε ότι η διαφορά $ω = 2\ell n2$. **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της παραπάνω αριθμητικής προόδου. **Μονάδες 5**

Γ. Αν $(β_ν)$, $ν \in N^*$, μια γεωμετρική πρόοδος με $β_1 = α_1$ και $β_2 = α_2$ όπου $α_1$, $α_2$ οι αντίστοιχοι όροι της παραπάνω αριθμητικής προόδου, να υπολογίσετε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $(β_ν)$, $ν \in N^*$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} - 1}$. **Μονάδες 15**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2^x$. Να λύσετε την εξίσωση:

$g(x) \cdot g(x + 1) \cdot g(x + 2) \cdot \ldots \cdot g(x + 19) = 2^{10}$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν α > 0 με α $\neq$ 1 και ∂_1, ∂_2 > 0 να αποδείξετε ότι: $\log_\alpha(\partial_1\partial_2) = \log_\alpha\partial_1 + \log_\alpha\partial_2$. **Μονάδες 15**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Οι λύσεις της εξίσωσης συνx = συνθ είναι x =2κπ ± θ, κ $\in$ Ζ.

β) ημ (α + β) = ημασυνβ – συναημβ.

γ) Ένα πολυώνυμο P (x) έχει παράγοντα το (x – ρ) αν και μόνο αν P (ρ) = 0.

δ) $\log_\alpha(\partial_1 + \partial_2) = \log_\alpha\partial_1 \cdot \log_\alpha\partial_2$.

ε) $\log\partial = x \Leftrightarrow 10^x = \partial$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση: 2ημx – $\sqrt{2}$ = 0. **Μονάδες 10**

Β. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2ημ\,(α + β)}{συν\,(α + β) + συν\,(α - β)}$ = εφα + εφβ. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο P (x)= $x^4 + αx^3 + 5x^2 + βx - 6$.

Α. Να βρείτε τις τιμές των α, β $\in$ R για τις οποίες το P (x) έχει παράγοντες τους (x + 1), (x – 2). **Μονάδες 15**

Β. Αν α = – 5 και β = 5 να λύσετε την εξίσωση P (x) = 0. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να αποδείξετε ότι log3 + 2log4 – log12 = 2log2. **Μονάδες 10**

Β. Να λύσετε την εξίσωση log (x – 1) + log (x + 2) = 2 (1 – log5). **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δώστε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου. **Μονάδες 5**

Β. Αποδείξτε ότι: $\log(\partial_1 \cdot \partial_2) = \log\partial_1 + \log\partial_2$. **Μονάδες 8**

Γ. Συμπληρώστε τις ισότητες:

α) Αν $\alpha^x = \theta$, με $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε $x =$ …………… .

β) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $S_\nu =$ …………… .

γ) Αν $\alpha \neq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in Z$, τότε εφ2α = …………… . **Μονάδες 6**

Δ. Δίνεται η πρόοδος: – 3, –1, 1, ... Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Η πρόοδος είναι:

i) αριθμητική με διαφορά – 2 **ii)** αριθμητική με διαφορά 2

iii) γεωμετρική με λόγο 2 **iv)** γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{3}$

β) Ο εκατοστός όρος α_{100} της προόδου είναι:

i) 300 **ii)** 195 **iii)** 65 **iv)** – 65

γ) Αν το άθροισμα των ν πρώτων όρων της προόδου είναι 60, τότε το ν είναι:

i) 10 **ii)** 100 **iii)** 1000 **iv)** – 10

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης: $(x^6 - 4x^5 + x^2 - 2) : (x + 1)$. **Μονάδες 10**

Β. Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $(x - 2)$, και η διαίρεσή του με το $(x - 1)$ αφήνει υπόλοιπο 8, βρείτε τα α και β. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Λύστε την τριγωνομετρική εξίσωση: $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x - 2 = 0$. **Μονάδες 10**

Β. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + x\right)\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$ **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Αποδείξτε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$. **Μονάδες 5**

Β. Λύστε την εξίσωση: $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$. **Μονάδες 10**

Γ. Αποδείξτε ότι η εξίσωση: $\ell n3 + \ell n(e^x - 1) = \ell n e^2 - 2$ έχει λύση $e = \ell n\frac{4}{3}$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος; **Μονάδες 5**

Β. Αποδείξτε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$. **Μονάδες 10**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

β) Για κάθε $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $\partial_1, \partial_2 > 0$ ισχύει: $\log_\alpha \frac{\partial_1}{\partial_2} = \log_\alpha \partial_1 - \log_\alpha \partial_2$.

γ) Έστω πολυώνυμο $P(x)$. Αν $(x - \rho)$ διαιρέτης του $P(x)$ τότε $P(\rho) = 0$.

δ) Το άθροισμα των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ με $\lambda \neq 1$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu\omega x$ με $\omega > 0$, $\rho > 0$ έχει περίοδο $T = 2\pi\omega$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha^2x^3 + \alpha^3x^2 + (\alpha + 4)x + 2$ με $\alpha \in R$, το οποίο έχει παράγοντα το $(x - 1)$.

Α. Να βρείτε το α. **Μονάδες 9**

Β. Για την τιμή του $\alpha = -2$ να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. **Μονάδες 9**

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (\alpha + 1)\sigma\upsilon\nu(\beta\pi x)$ όπου α θετικός πραγματικός και β πραγματικός αριθμός.

Α. Αν η μέγιστη τιμή της $f(x)$ είναι 3 και η περίοδός της είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$. **Μονάδες 13**

Β. Για τις τιμές $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}$. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha + 8}{3 - \alpha}\right)^x$ με $x \in R$.

Α. Να βρείτε το α ώστε η $f(x)$ να είναι γνησίως αύξουσα. **Μονάδες 12**

Β. Για τη μεγαλύτερη ακέραια τιμή του α, ορίζεται η συνάρτηση $g(x) = f(x - 2) - 1$. Να βρείτε τα σημεία όπου η καμπύλη της γραφικής παράστασης της $g(x)$ τέμνει τον άξονα x΄x. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι $συν2α = \begin{cases} συν^2α - ημ^2α \\ 2συν^2α - 1 \\ 1\text{-}2ημ^2α \end{cases}$. **Μονάδες 15**

Α2. Να απαντήσετε αν είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) οι παρακάτω προτάσεις:

i) Το ημ2α είναι ίσο με $2ημ^2α + 1$.

ii) Το ημ6α είναι ίσο με 2ημ3α·συν3α.

iii) Αν εφβ = χ και εφα = y, τότε η εφ (α + β) είναι ίση με $\dfrac{x-y}{1+xy}$.

iv) Το $συν^2α$ είναι ίσο με $\dfrac{1 + συν2α}{2}$.

v) Το ημ (α + β) + ημ (α – β) είναι ίσο με 0. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{ημ\,(α-β)}{συνα \cdot συνβ} + \dfrac{ημ\,(β-γ)}{συνβ \cdot συνγ} + \dfrac{ημ\,(γ-α)}{συνγ \cdot συνα} = 0$. **Μονάδες 10**

Β2. Να λύσετε την εξίσωση: $συν\left(x + \dfrac{π}{4}\right) + συν\left(x - \dfrac{π}{4}\right) = 1$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + λx^3 + μx^2 - 8x - 4$.

Γ1. Αν γνωρίζετε ότι οι αριθμοί $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$ είναι ρίζες του πολυωνύμου, δείξτε ότι λ = 2 και μ = – 3. **Μονάδες 10**

Γ2. Για τις τιμές των λ, μ του προηγούμενου ερωτήματος, να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $α_1 = \log α$ και $α_2 = \log\dfrac{α^2}{β}$ (με α, β θετικούς αριθμούς) είναι οι δυο πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου, τότε:

Δ1. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. **Μονάδες 5**

Δ2. Να αποδείξετε ότι $α_5 = \log\dfrac{α^5}{β^4}$. **Μονάδες 10**

Δ3. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι

$S_ν = \dfrac{ν}{2}\left(\log α^{ν+1} - \log β^{ν-1}\right)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδειχθεί η ισότητα: $\log_{α}θ^{κ} = κ \log_{α}θ$, όπου $α > 0$, $α \neq 1$, $θ > 0$, $κ \in R$. **Μονάδες 10**

Α2. Πότε η συνάρτηση f λέγεται περιττή; **Μονάδες 5**

Α3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» (Σ) ή «Λάθος» (Λ):

α) $ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) = συνx \ \forall \ x \in R$.

β) $e^{\ln 5} = 5$.

γ) Η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

δ) $3 = \log_{7} 7^{3}$

ε) Αν $(x + 8)$ διαιρεί το $P(x)$, τότε $P(8) = 0$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Β1. Να λύσετε την εξίσωση: $2ημx + 1 = 0$. **Μονάδες 10**

Β2. Να λύσετε το σύστημα $\left\{\begin{array}{l}(μ - 1)x + ψ = 1 \\ 3x + (μ + 1)ψ = 3\end{array}\right\}$ για $μ \in R$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^{3} + αx^{2} + βx + 6$, όπου $α, β \in R$.

Γ1. Να βρεθούν τα α, β αν το -2 είναι ρίζα του $P(x)$
και η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι 36. **Μονάδες 15**

Γ2. Για $α = 12$ και $β = 15$, να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x + 2)$
και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(x^{2} - x)$ και $g(x) = \log(x - 1)$.

Δ1. Βρείτε τα πεδία ορισμού A_f, A_g των συναρτήσεων f, g. **Μονάδες 5**

Δ2. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1 + g(x)$. **Μονάδες 10**

Δ3. Εξετάστε αν η γραφική παράσταση της f (C_f) τέμνει τον οριζόντιο άξονα
και γράψτε το σημείο τομής. Ομοίως για την C_g. **Μονάδες 5**

Δ4. Να δειχθεί ότι: $\frac{συνx}{\log 10 - ημx} + \frac{συνx}{\ln e + ημx} = \frac{\log 100}{συνx}$. **Μονάδες 5**

Β΄ Λυκείου

Γεωμετρία

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να εγγραφεί τετράγωνο ΑΒΓΔ σε κύκλο (Ο, R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου και ότι $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 το απόστημά του. **Μονάδες 15**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} > 90°$.

β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ, για τη διάμεσό του μ_B ισχύει ότι: $\mu_B^2 = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{4}$.

γ) Για το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ ισχύει ότι $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$,

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ΑΒΓ κύκλου.

δ) Το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ δίνεται

από τον τριγωνομετρικό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\hat{A}$.

ε) Σε κύκλο (Ο, R) η πλευρά εγγεγραμμένου ισόπλευρου τριγώνου λ_3

δίνεται από τη σχέση $\lambda_3 = R\sqrt{2}$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α = 7, β = 12, γ = 9:

Α. να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. **Μονάδες 8**

Β. να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ. **Μονάδες 10**

Γ. να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου του ΒΜ. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α = 13, β = 14 και γ = 15.

Α. Να δείξετε ότι το εμβαδό του ΑΒΓ ισούται με 84. **Μονάδες 5**

Β. Να βρείτε την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε το εμβαδό του μέρους του τριγώνου ΑΒΓ

που δεν περιέχεται στον εγγεγραμμένο κύκλο. **Μονάδες 10**

Δ. Να βρείτε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε ΟΑ = ΑΒ. Από το Β φέρνουμε το εφαπτόμενο στον κύκλο (Ο, R) τμήμα ΒΓ.

Α. Να δείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$. **Μονάδες 5**

Β. Να δείξετε ότι η γωνία $A\hat{O}\Gamma = 60°$. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 5**

Δ. Να βρείτε το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω ένας κύκλος (Ο, R).

α) Στον κύκλο (Ο, R) να εγγράψετε τετράγωνο (περιγράψτε την κατασκευή). **Μονάδες 3**

β) Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου. **Μονάδες 5**

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 απόστημα του τετραγώνου. **Μονάδες 5**

Β. Να δώσετε τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου. **Μονάδες 2**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} > 90°$.

β) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.

γ) Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \dfrac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu B$.

δ) Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύει η σχέση $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$.

ε) Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση $E = 2\pi R^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Σε κύκλο (Ο, R) ακτίνας R = 4cm εγγράφουμε κανονικό ν-γωνο με γωνία $\varphi_\nu = 120°$.

Να βρείτε:

Α. τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου. **Μονάδες 8**

Β. την κεντρική γωνία του πολυγώνου. **Μονάδες 5**

Γ. την πλευρά και το απόστημα του πολυγώνου. **Μονάδες 6**

Δ. το εμβαδόν του πολυγώνου. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 7, γ = 6 και α = 11.

Α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. **Μονάδες 6**

Β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου μ_α. **Μονάδες 7**

Γ. Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ. **Μονάδες 6**

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 4ο

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ έτσι ώστε

$AB = R$, $B\Gamma = R\sqrt{2}$ και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$.

Α. Να υπολογίσετε το μέτρο του τόξου ΑΔ και το μήκος της χορδής ΑΔ ως συνάρτηση του R. **Μονάδες 6**

Β. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **Μονάδες 4**

Γ. Να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν του ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του R. **Μονάδες 8**

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ συναρτήσει του R. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή. **Μονάδες 10**

Β. Αντιστοιχήστε κάθε σχήμα της στήλης Α το εμβαδόν του από τη στήλη Β.

Α	**Β**
	α) $\tau\rho$
1) τραπέζιο	**β)** $\alpha\upsilon_\alpha$
2) ημικύκλιο	**γ)** $\frac{\upsilon}{2}(\beta + \text{Β})$
3) τρίγωνο	**δ)** $\frac{\pi\rho^2\mu}{360}$
	ε) $\rho^2\,\frac{\pi}{2}$

Μονάδες 7,5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot\text{ΑΔ}$, όπου ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στην πλευρά β.

β) Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

γ) Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύει η σχέση: $\alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{2} = \text{R}$.

Μονάδες 7,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία $\omega = 30°$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 3.

Υπολογίστε:

Α. τον αριθμό των πλευρών του. **Μονάδες 7**

Β. τη γωνία του. **Μονάδες 8**

Γ. το εμβαδόν του. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 3, γ = 2 και εμβαδόν $E = \frac{\beta\gamma\sqrt{3}}{4}$. Υπολογίστε:

Α. τη γωνία Α **Μονάδες 7**

Β. την πλευρά α **Μονάδες 7**

Γ. την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. **Μονάδες 5**

Δ. Εξετάστε το είδος τού τριγώνου ως προς τις γωνίες. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, ΑΒ = R , ΑΓ = $R\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (Β, R) και (Γ, $R\sqrt{3}$), που τέμνονται στα σημεία Α, Δ. Υπολογίστε συναρτήσει του R:

Α. την πλευρά ΒΓ. **Μονάδες 5**

Β. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. **Μονάδες 5**

Γ. το εμβαδόν του ΑΒΔΓ. **Μονάδες 5**

Δ. το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Δείξτε ότι το εμβαδό τραπεζίου, ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του. Δηλαδή $E = \frac{(B+\beta)}{2}\, \upsilon$. **Μονάδες 10**

Α2. Γράψτε το μήκος της πλευράς (λ_4) και του αποστήματος (α_4) εγγεγραμμένου τετραγώνου σε κύκλο ακτίνας R. **Μονάδες 5**

Α3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» (Σ) ή «Λάθος» (Λ):

α) Το εμβαδόν τριγώνου με ημιπερίμετρο τ και ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου ρ είναι $E = \tau\rho$.

β) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90°$.

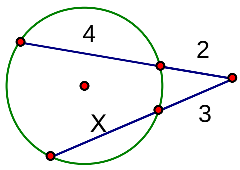
γ) Η κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι $\omega_3 = 150°$.

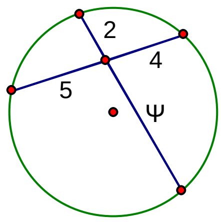
δ) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}$.

ε) Το μήκος τόξου γωνίας μ° σε κύκλο ακτίνας R είναι $\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot \mu}{180}$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Στα διπλανά σχήματα να προσδιοριστούν οι τιμές των χ, ψ.





Μονάδες 10+15

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \sqrt{5}$, $\beta = \sqrt{2}$, $\gamma = 3$. Να υπολογιστούν:

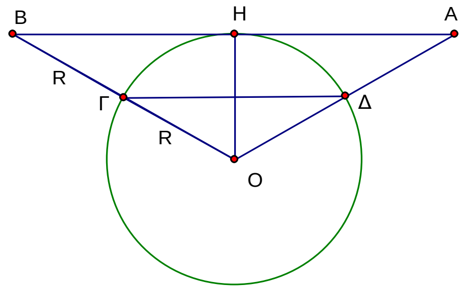
Γ1. Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες. **Μονάδες 8**

Γ2. Η γωνία $\hat{A}$. **Μονάδες 7**

Γ3. Η προβολή της πλευράς β = ΑΓ στην πλευρα γ = ΑΒ. **Μονάδες 5**

Γ4. Η διάμεσος μ_γ (στην πλευρά γ = ΑΒ). **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο



Στο διπλανό σχήμα δινεται ο κύκλος (Ο, R)
και τα ισοσκελή τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ, όπου ΟΗ ακτίνα
στο σημείο επαφής της ΑΒ με τον κύκλο.
Να υπολογιστούν:

Δ1. Τα εμβαδά των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΓΔ (συναρτήσει της ακτίνας R). **Μονάδες 10**

Δ2. Το εμβαδό του κυκλικού τομέα ΟΓΗΔ. **Μονάδες 5**

Δ3. Το εμβαδό του κυκλικου τμήματος ΓΗΔ. **Μονάδες 5**

Δ4. Το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΒΗΓ. **Μονάδες 5**

Β΄ Λυκείου

Κατεύθυνση

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1x_2 \neq 0$, να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1$

όπου λ_1, λ_2 οι αντίστοιχοι συντελεστές των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. **Μονάδες 10**

Β. Αν Ε και Ε′ δύο σημεία του επιπέδου, τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες Ε και Ε′; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2) \Rightarrow \vec{\alpha}\,\vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

β) Έστω η ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

Τότε ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = -\dfrac{B}{A}$.

γ) Έστω η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2\rho y$.

Τότε η διευθετούσα της έχει εξίσωση $x = -\dfrac{\rho}{2}$.

δ) Έστω ο κύκλος με εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$. Η εφαπτομένη του στο σημείο (x_1, y_1) δίνεται από την εξίσωση $x\cdot x_1 + y\cdot y_1 = \rho^2$.

ε) Η εκκεντρότητα της υπερβολής $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι $\varepsilon > 1$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (4, – 4), Β (1, 4), Γ (– 1, 0).

Α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ. **Μονάδες 5**

Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της διαμέσου ΑΜ. **Μονάδες 7**

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας του ύψους ΑΔ. **Μονάδες 7**

Δ. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$. Να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{B\Gamma}}\overrightarrow{AM}$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $4x^2 + y^2 = 4$.

Α. Να βρείτε τις εστίες Ε και Ε′ της έλλειψης. **Μονάδες 5**

Β. Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης που να είναι παράλληλη στην ευθεία $x + y - 3 = 0$. **Μονάδες 10**

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.

Α. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. **Μονάδες 5**

Β. Να βρεθούν οι εφαπτομένες του κύκλου που άγονται από το σημείο Α (1, 0). **Μονάδες 10**

Γ. Να βρεθεί η οξεία γωνία των εφαπτομένων του κύκλου του ερωτήματος (Β). **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο Α (x_1, y_1) έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$. **Μονάδες 14**

Β. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής. **Μονάδες 3**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) δίνονται από τις σχέσεις $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$.

β) Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$ τότε $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 - y^2}$.

γ) Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

δ) Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (Α, Β)$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α (1, 1), Β (4, 5) και Γ (6, – 11).

Α. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. **Μονάδες 5**

Β. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$. **Μονάδες 5**

Γ. Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$. **Μονάδες 5**

Δ. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\theta}$ που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$. **Μονάδες 5**

Ε. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

Α. Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές, τα μήκη των αξόνων και την εκκεντρότητα της παραπάνω έλλειψης. **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη και κορυφές τα σημεία Α′ (– 1, 0) και Α (1, 0). **Μονάδες 10**

Γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της υπερβολής του ερωτήματος (Β). **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση $(\mu^2 - 3\mu + 2)\,x + (\mu^2 - 1)\,y + 3 - 3\mu = 0$, $\mu \in R$.

Α. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία. **Μονάδες 10**

Β. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες με την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο. **Μονάδες 10**

Γ. Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι παράλληλη στον άξονα x′x; **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και (ε) μια ευθεία του επιπέδου με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$. **Μονάδες 15**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η ευθεία που περνά από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),\ x_2 \neq x_1.$$

β) Υπάρχουν 2 ευθείες ε_1 και ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, για τις οποίες ισχύει συγχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\lambda_1\lambda_2 = -1$.

γ) Οι ευθείες $y = 3x + 1$ και $3x - y = 4$ τέμνονται.

δ) Η ευθεία $\alpha x + \beta y = \alpha\beta$ με $\alpha, \beta \neq 0$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$.

ε) Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ δίνεται από τον τύπο $d(M_0, \varepsilon) = \dfrac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $5x - 8y - 51 = 0$ και ε_2: $5x - 8y + 68 = 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. **Μονάδες 10**

Β. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις της αρχής των αξόνων από τις ε_1, ε_2. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(-2, -1)$ $B(1, 5)$ και $\Gamma(3, 2)$.

Α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. **Μονάδες 6**

Β. Να υπολογίσετε το συνΑ. **Μονάδες 6**

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. **Μονάδες 6**

Δ. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ σε δυο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους, εκ των οποίων η μια να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η υπερβολή $C: 3x^2 - y^2 = 12$.

Α. Να βρείτε τις εστίες, τις κορυφές και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της. **Μονάδες 7**

Β. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης, η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την υπερβολή και εκκεντρότητα $\varepsilon = \dfrac{4}{5}$. **Μονάδες 6**

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής M_1, M_2, M_3, M_4 της έλλειψης και των ασύμπτωτων της υπερβολής. **Μονάδες 6**

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου που ορίζεται από τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) τα άκρα του διανύσματος ΑΒ, γράψτε τις σχέσεις που μας δίνουν:

α) τις συντεταγμένες (x, y) του $\overrightarrow{AB}$. **Μονάδες 3**

β) τις συντεταγμένες (x_0, y_0) του μέσου Μ του $\overrightarrow{AB}$. **Μονάδες 3**

γ) το μέτρο του $\overrightarrow{AB}$. **Μονάδες 3**

δ) τον συντελεστή διεύθυνσης του $\overrightarrow{AB}$. **Μονάδες 3**

Β. **α)** Γράψτε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. **Μονάδες 2,5**

β) Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, γράψτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων των δύο διανυσμάτων. **Μονάδες 2,5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η ευθεία $y = -2x$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Οι ευθείες $y = x - 2$ και $y = -x + 1$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

γ) Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ έχει διάμετρο 4.

δ) Η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει εστιακή απόσταση $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα σημεία Α (5, 0) και Β (0, 5) του καρτεσιανού επιπέδου. Βρείτε:

Α. την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. **Μονάδες 9**

Β. την εξίσωση της ευθείας ε′ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από τη αρχή των αξόνων. **Μονάδες 9**

Γ. το σημείο τομής των ευθειών ε και ε′. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Βρείτε:

Α. τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα της έλλειψης. **Μονάδες 6**

Β. τα σημεία τομής της έλλειψης με την ευθεία $x - y = 0$. **Μονάδες 7**

Γ. τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης που είναι παράλληλες στην ευθεία $x - y = 0$. **Μονάδες 12**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο Μ (2, 1).

Α. Βρείτε το κέντρο Ο και την ακτίνα ρ του κύκλου. **Μονάδες 6**

Β. Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Μ. **Μονάδες 12**

Γ. Αν Α, Β τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων, βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΜΑΟΒ. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Δείξτε ότι η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + ψ^2 = ρ^2$ στο σημείο του Α $(x_1, ψ_1)$ έχει εξίσωση: $xx_1 + ψψ_1 = ρ^2$. **Μονάδες 10**

Α2. Να γράψετε τον ορισμό της έλλειψης. **Μονάδες 5**

Α3. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» (Σ) ή «Λάθος» (Λ):

α) $\vec{α} \perp \vec{β} \Leftrightarrow \vec{α} \cdot \vec{β} = 0$.

β) Κάθε εξίσωση της μορφής: $x^2 + ψ^2 + Αx + Βψ + Γ = 0$, $\forall$ Α, Β, Γ $\in$ R, παριστάνει κύκλο στο επίπεδο.

γ) Η εξίσωση $x = x_0$ παριστάνει κατακόρυφη ευθεία στο επίπεδο.

δ) $συνθ = \dfrac{\vec{α} \cdot \vec{β}}{|\vec{α}|\ |\vec{β}|}$, όπου $θ = \left(\widehat{\vec{α}, \vec{β}}\right)$.

ε) Αν $\vec{i}$, $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, τότε: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{α}, \vec{β}$ με $\left(\widehat{\vec{α}, \vec{β}}\right) = 60°$. Να προσδιοριστούν:

Β1. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{α} \cdot \vec{β}$. **Μονάδες 10**

Β2. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{γ} = \vec{α} - 2\vec{β}$. **Μονάδες 10**

Β3. Η γωνία των διανυσμάτων $\vec{β}, \vec{γ}$. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ με Ο (0, 0), Α (2, 2), Β (0, 4). Να υπολογιστούν:

Γ1. Οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου. **Μονάδες 5**

Γ2. Η εξίσωση της διαμέσου $μ_α$. **Μονάδες 5**

Γ3. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου της ΑΒ. **Μονάδες 5**

Γ4. Η απόσταση του Β από την ΟΑ. **Μονάδες 5**

Γ5. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)\,x + (\lambda - 1)\,\psi + \lambda - \lambda^2 = 0$, $\lambda \in R$ (1)

Δ1. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in R$ ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία. **Μονάδες 10**

Δ2. Βρείτε το λ, ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία διερχόμενη από την αρχή των αξόνων. **Μονάδες 5**

Δ3. Δείξτε ότι όλες οι εξισώσεις της μορφής (1) διέρχονται από σταθερό σημείο Α (x_A, ψ_A). **Μονάδες 5**

Δ4. Γράψτε την εξίσωση κύκλου C κέντρου Ο (0, 0) με χορδή ΒΓ μέσου Α (x_A, ψ_A), όπου Β, Γ σημεία των x′x και ψ′ψ αντίστοιχα. **Μονάδες 5**

Γ΄ Λυκείου

Γενική Παιδεία

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω δειγματοχώρος Ω αποτελούμενος από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.
Για τα ενδεχόμενα Α και Β του Ω να δείξετε ότι: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. **Μονάδες 10**

Β. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματοχώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Εάν $f(x) = \sqrt{x}$ με $x > 0$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$.

β) Εάν $f(x) = e^x$ τότε $f'(x) = e^x$.

γ) Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα στοιχεία ενός δείγματος μεγέθους ν δίνεται από τη σχέση $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $i = 1, 2, 3, ..., \kappa$ με $\kappa < \nu$.

δ) Η μέση τιμή $\bar{X}$ ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι μέτρο διασποράς.

ε) Εάν Α και Β ενδεχόμενα ενός δειγματοχώρου Ω
τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 2$.

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 5**

Β. Να βρεθεί η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$. **Μονάδες 5**

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f'(x) = 0$. **Μονάδες 5**

Δ. Εάν $f(x) = x^2 - 4x - 5$ να μελετηθεί η $f(x)$
ως προς τα ακρότατα και να βρεθούν αυτά. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ: 16, 14, 22, 18, 20 + α, όπου $\alpha \in R$.

Α. Να βρεθεί το α εάν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{X} = 20$. **Μονάδες 6**

Β. Εάν α = 10 να βρεθούν:

α) το εύρος R του δείγματος **Μονάδες 4**

β) η διάμεσος δ του δείγματος **Μονάδες 5**

γ) η διασπορά του δείγματος **Μονάδες 8**

δ) Να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση $s = 4\sqrt{2}$. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 4ο

Σε μια έρευνα που έγινε στους μαθητές ενός Λυκείου σχετικά με τον χρόνο που κάνουν για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο, διαπιστώθηκε ότι ο μέσος χρόνος των μαθητών είναι $\bar{X} = 10$ λεπτά με τυπική απόκλιση s = 2 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή και γνωρίζοντας ότι στο Λύκειο αυτό φοιτούν 200 μαθητές:

Α. Να σχεδιάσετε την καμπύλη συχνοτήτων για την κανονική κατανομή. **Μονάδες 4**

Β. Να εξετάσετε εάν το δείγμα είναι ομοιογενές. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών και πόσοι μαθητές χρειάζονται από 6 έως 14 λεπτά για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο. **Μονάδες 7**

Δ. Μια ημέρα λόγω μεγάλης κυκλοφορίας κάθε μαθητής καθυστέρησε 5 λεπτά για να πάει από το σπίτι του στο σχολείο. Να βρείτε:

α) τη νέα μέση τιμή $\bar{X}$. **Μονάδες 3**

β) τη νέα τυπική απόκλιση s. **Μονάδες 3**

γ) τη μεταβολή του συντελεστή μεταβολής cv. **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι 1, δηλαδή $f'(x) = 1$.

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η συνάρτηση $f(x) = 2x^4$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

β) Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

γ) Αν η 1η παράγωγος μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $g(x)$ είναι 4ου βαθμού, τότε η $g(x)$ είναι 5ου βαθμού.

δ) Αν για τη συνάρτηση $f(x)$, ορισμένη και συνεχή σε ένα διάστημα Δ, υπάρχει η $f'(x_0)$ και είναι $f'(x_0) \neq 0$ με χο εσωτερικό σημείο του Δ, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $f(x)$.

ε) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Μια μέρα με πολύ άσχημες καιρικές συνθήκες, η πιθανότητα να λειτουργήσουν τα υπεραστικά λεωφορεία είναι 30%, η πιθανότητα να μην λειτουργήσουν τα τρένα είναι 40% και η πιθανότητα να λειτουργήσει ένα τουλάχιστον συγκοινωνιακό μέσο από τα προηγούμενα είναι 80%. Ποια είναι η πιθανότητα να λειτουργήσουν συγχρόνως και τα δυο;

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3ο

Η βαθμολογία στα 5 μαθήματα ενός μαθητή είναι: 13, 9, 10, 12, 16. Να υπολογίσετε:

Α. τη μέση τιμή

Β. το εύρος

Γ. τη διακύμανση

Δ. την τυπική απόκλιση

Ε. τον συντελεστή μεταβολής. **Μονάδες 25**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x + 1)^2$, $x \in R$.

Α. Να βρείτε την $f'(0)$. **Μονάδες 5**

Β. Να προσδιορίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με $x = 0$. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0, f(0))$. **Μονάδες 5**

Δ. Να βρείτε τις θέσεις για τις οποίες η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο. **Μονάδες 5**

Ε. Να βρείτε το είδος και τις τιμές του ακρότατου αυτού. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αποδείξτε ότι ισχύει: P (A′) = 1 – P (A), όπου A και A′ δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. **Μονάδες 10**

Β. Τι λέγεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f (x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

δ) Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \emptyset$.

ε) Η συχνότητα ν_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f (x) = x – 6x + 8, $x \in R$.

Α. Να βρείτε την f (x). **Μονάδες 5**

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 20**

ΘΕΜΑ 3ο

Η επίδοση ενός φοιτητή σε οκτώ μαθήματα είναι: 1, 5, 2, 7, 5, 6, 4, 10. Να υπολογίσετε:

Α. τη μέση τιμή **Μονάδες 6**

Β. τη διάμεσο **Μονάδες 6**

Γ. το εύρος **Μονάδες 5**

Δ. τη διακύμανση. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4ο

Σε μια σχολική τάξη με 30 μαθητές οι 15 ασχολούνται με τον αθλητισμό, οι 10 με τη μουσική και οι 4 ασχολούνται και με τα δύο. Επιλέγοντας τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α. να ασχολείται με τον αθλητισμό ή τη μουσική. **Μονάδες 6**

Β. να μην ασχολείται με τον αθλητισμό ούτε με τη μουσική. **Μονάδες 6**

Γ. να ασχολείται με τον αθλητισμό αλλά όχι με τη μουσική. **Μονάδες 6**

Δ. να ασχολείται με το πολύ μία δραστηριότητα. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δώστε τον ορισμό της γνησίως αύξουσας και της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. **Μονάδες 7**

Β. Αν $f_1, f_2, ..., f_κ$ οι σχετικές συχνότητες μιας μεταβλητής Χ,
αποδείξτε ότι: $f_1 + f_2 + ... + f_κ = 1$. **Μονάδες 4**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Ισχύει: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ) Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα $ν_i$ μιας μεταβλητής Χ με το μέγεθος ν του δείγματος, προκύπτει η αθροιστική συχνότητα N_i.

δ) Δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cup B = \varnothing$.

Μονάδες 8

Δ. Αντιστοιχήστε κάθε πρόταση της στήλης Α με ισοδύναμη σχέση της στήλης Β.

Α	**Β**
1) Πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β	**α)** $A \cup B$
2) Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β	**β)** $A \cap B$
3) Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β	**γ)** $A \cap B'$
	δ) $A - B$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$.

Α. Βρείτε το πεδίο ορισμού Α της f. **Μονάδες 4**

Β. Υπολογίστε το f (0) και το f (– 2). **Μονάδες 4**

Γ. Βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 6**

Δ. Εξετάστε τη μονοτονία της f. **Μονάδες 4**

Ε. Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο πίνακας κατανομής 10 καϊκιών ως προς το μήκος τους σε μέτρα.

Μήκος καϊκιών σε μέτρα x_i	Συχνότητα v_i	f_i	N_i	F_i	$x_i v_i$
10	2				
11	1				
12	2				
13	4				
14	1				
Σύνολα					

Α. Συμπληρώστε τις κενές θέσεις του πίνακα. **Μονάδες 15**

Β. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα δείγμα 100 οικογενειών ενός νησιού, 55 έχουν αυτοκίνητο, 25 έχουν βάρκα, ενώ 10 έχουν και τα δύο. Βρείτε την πιθανότητα κάποια οικογένεια απ' αυτές:

Α. να έχει μόνο αυτοκίνητο **Μονάδες 6**

Β. να έχει μόνο ένα από τα δύο **Μονάδες 6**

Γ. να έχει τουλάχιστον ένα από τα δύο **Μονάδες 7**

Δ. να μην έχει κανένα από τα δύο. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α, Α′ να δείξετε ότι ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$. **Μονάδες 15**

Β. Αναφέρατε τις κατηγορίες και υποκατηγορίες που διακρίνουμε τις μεταβλητές ενός δειγματικού χώρου. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in R$. Να βρείτε:

Α. το όριο $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$. **Μονάδες 5**

Β. την παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 5**

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in R$.

Α. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 5**

Β. Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f. **Μονάδες 10**

Γ. Να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων της. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος και τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_3, \omega_4\}$ με πιθανότητες $P(A) = 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}5$. Αν $P(\omega_2) = 0{,}2$ να βρείτε τις πιθανότητες:

Α. $P(\omega_3)$ **Μονάδες 5**

Β. $P(\omega_4)$ **Μονάδες 5**

Γ. $P(\omega_1)$ **Μονάδες 5**

Δ. $P(A \cup B)$ **Μονάδες 5**

Ε. $P(A - B)$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **Μονάδες 10**

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν f συνεχής για κάθε $x \in R$ και $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$, τότε $f(2) = 5$.

β) Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα x′x.

γ) Η ομάδα αίματος είναι ποσοτική διακριτή μεταβλητή.

δ) Αν $\lim_{x\to \alpha} f(x) = \ell$, τότε το σημείο (α, ℓ) βρίσκεται πάνω στην καμπύλη της f.

ε) Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε $P(\Omega) = 1$. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to -1} (x^3 - x^2 - x + 1)$ **Μονάδες 5**

β) $\lim_{x\to 4} \dfrac{(x^2-16)(x^2-5x+6)}{x^2-4x}$ **Μονάδες 7**

Β. Να βρείτε την παράγωγο καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ **Μονάδες 5**

β) $f(x) = \dfrac{1 + \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

Α. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 5**

Β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x+2} - 8}{x^2 - 4}$ και Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης με $P(A \cup B) = 0{,}6$ και $P(A) = \lim_{x\to 2} f(x)$.

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$. **Μονάδες 5**

Β. Να βρείτε την $P(A)$. **Μονάδες 6**

Γ. Αν $P(A) = 0{,}25$, τότε να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο Β είναι $\dfrac{7}{20}$. **Μονάδες 7**

Δ. Να δείξετε ότι $P(B) \geq \dfrac{7}{20}$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για δυο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. **Μονάδες 10**

Β. Σε ποιές κατηγορίες διακρίνουμε τις μεταβλητές και τι γνωρίζετε για κάθε κατηγορία; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

β) Ισχύει: $f\left(\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ) Δύο ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cup B = \varnothing$.

δ) Ισχύει: $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

ε) Για δυο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x + 3}$.

Α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$. **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε τις παραγώγους των f, g. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \alpha + 2010$, $\alpha, x \in R$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 10**

Β. Να βρείτε το α ώστε το τοπικό μέγιστο της f να είναι διπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο. **Μονάδες 8**

Γ. Για $\alpha = 2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = -1$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + x + 10$, $x \in R$. Οι πιθανότητες P (A) και P (B) δύο ενδεχομένων Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε ότι $P(A) = \dfrac{1}{2}$ και $P(B) = \dfrac{1}{3}$. **Μονάδες 8**

Β. Για τις παραπάνω τιμές των P (A), P (B) καθώς και για $P(A \cup B) = \dfrac{2}{3}$,

να βρείτε τις πιθανότητες:

α) $P\left[(A \cap B)'\right]$ **Μονάδες 8**

β) $P\left[(A - B) \cup (B - A)\right]$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α, Α′ να δείξετε ότι ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$. **Μονάδες 15**

Β. Αναφέρατε τις κατηγορίες και υποκατηγορίες που διακρίνουμε τις μεταβλητές ενός δειγματικού χώρου. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in R$. Να βρείτε:

Α. το όριο $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$. **Μονάδες 5**

Β. την παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 5**

Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$. **Μονάδες 7**

Δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο

Αν $A \subseteq B$ είναι δύο μη κενά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cap B$, $A \cup B$ και $A \cap B'$. **Μονάδες 25**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $\Omega = \{6, 7, 8\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(6) = 2P(8) = \frac{1}{3}$.

Α. Να βρείτε το $P(7)$. **Μονάδες 7**

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 + 2011$, $x \in R$ και $\lambda \in \Omega$.

Θεωρούμε το ενδεχόμενο $E = \{\lambda \in \Omega \ / \ f''(x) = 0 \text{ για } x = 0\}$.

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε. **Μονάδες 18**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β] τότε δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$. **Μονάδες 15**

Β. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

β) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

γ) Η εικόνα f (Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης που δεν είναι σταθερή, είναι διάστημα. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 2ο

Αν $z = 9 - 12i$ και $|w| = 4$, τότε:

Α. να βρείτε το μέτρο του z **Μονάδες 12**

Β. να αποδείξετε ότι $11 \le |z + w| \le 19$. **Μονάδες 13**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ όπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in R$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2+x+2} = 2$. Αν η εφαπτόμενη της C_f στο (2, f (2)) είναι κάθετη στην ευθεία ε: $x + 3y - 2 = 0$, να βρείτε την f. **Μονάδες 25**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ell nx}{x}$, $x > 0$.

Α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **Μονάδες 8**

Γ. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ρίζες της εξίσωσης $\ln x = \dfrac{x}{2}$. **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για δυο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. **Μονάδες 10**

Β. Σε ποιές κατηγορίες διακρίνουμε τις μεταβλητές και τι γνωρίζετε για κάθε κατηγορία; **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

β) Ισχύει: $f\big((g(x))\big)' = f'((g(x)) \cdot g(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ) Δύο ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cup B = \varnothing$.

δ) Ισχύει: $(\ell n x)' = \frac{1}{x}$.

ε) Για δυο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A - B) = P(A) - P(B)$. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$ **Μονάδες 5**

β) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x^2 - 16)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 4x}$ **Μονάδες 7**

Β. Να βρείτε την παράγωγο καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$ **Μονάδες 5**

β) $f(x) = \dfrac{x + ημx}{1 + συνx}$ **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$, $x \in R$.

Α. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. **Μονάδες 5**

Β. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$. **Μονάδες 5**

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (1, f (1)). **Μονάδες 7**

Δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2011$, $x \in R$.

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και Α, Β ενδεχόμενα του Ω με $A \subseteq B$. Αν στα σημεία $x_1 = P(A)$ και $x_2 = P(B)$ οι εφαπτόμενες στην καμπύλη της f είναι παράλληλες στον άξονα xx':

Α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cup B)\ \ \frac{2}{3}$. **Μονάδες 13**

Β. Να βρείτε τις πιθανότητες:

α) $P(A \cap B)$ **Μονάδες 6**

β) $P(B - A)$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f με $f(x) = x^2$, είναι $f'(x) = 2x$. **Μονάδες 10**

Α2. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 5**

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ):

α) Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B)$.

β) (συνx)′ = – ημx.

γ) Το εμβαδόν που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ) Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α ισχύει ότι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in A$,τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

ε) Ισχύει: $P(\varnothing) = 1$, όπου $\varnothing$ το αδύνατο ενδεχόμενο. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων:

X_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\ \%$
2	10					
4			25			
6	5					
8			50			
ΣΥΝΟΛΟ			---------	------------		----------

Β1. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε. **Μονάδες 12**

Β2. Να βρείτε:

α) το πλήθος των παρατηρήσεων με τιμή τουλάχιστον 4.

β) το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμή το πολύ 6. **Μονάδες 8**

Β3. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

Γ1. **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τις θέσεις των ακρότατων.

γ) Να υπολογίσετε τις τιμές των ακροτάτων. **Μονάδες 10**

Γ2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω ορίων:

α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f'(x)}{6x - 12}$ και **β)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x + 1}$. **Μονάδες 10**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο Κ (0, f (0)). **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ο δειγματικός χώρος Ω, με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τα ενδεχόμενά του Α και Β, ώστε: $16\,(P(A))^2 + 9\,(P(B))^2 - 8\,P(A) - 6\,P(B) + 2 = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $P(A) = \dfrac{1}{4}$ και $P(B) = \dfrac{1}{3}$. **Μονάδες 10**

Δ2. Αν $P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$, να βρείτε τις πιθανότητες :

α) $P(A \cap B)$

β) $P(B')$

γ) $P(A - B)$

δ) $P[(A - B) \cup (B - A)]$ **Μονάδες 15**